0.1 Funktionen und Felder

0.1.1 Vektorfunktionen

Ist ein Vektor $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ nicht konstant sondern ändert seine Länge und/oder Richtung in Abhängigkeit einer Variablen t, dann spricht man von einer Vektorfunktion $\mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))$. In den meisten Anwendungen ist t eine kontinuierliche Variable (Zeit) und $r_1(t), r_2(t)$ und $r_3(t)$ sind im betrachteten Intervall von t kontinuierliche Funktionen. In so einem Fall nennt man $\mathbf{r}(t)$ eine *kontinuierliche Vektorfunktion von t.*

Beispiel:

$$\mathbf{r}(t) = (t^{\frac{1}{3}}, r^2, \sin t), \qquad 0 \leq t < \infty.$$

Der Ortsvektor $\vec{OP}$ repräsentiere die kontinuierliche Vektorfunktion $\mathbf{r}(t)$, wobei O der Ursprung ist und P der Punkt $(r_1(t), r_2(t), r_3(t))$. Während sich t ändert, beschreibt dann P eine räumliche, kontinuierliche Bahn B, auch Raumkurve oder Hodograph genannt.

0.1.2 Differentiation eines Vektors

Sind $r_1(t), r_2(t)$ und $r_3(t)$ in einem bestimmten Intervall von t einmal differenzierbar nach t, dann ist die erste Ableitung der Funktion $\mathbf{r}(t)$ nach t definiert als

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (\frac{dr_1}{dt}, \frac{dr_2}{dt}, \frac{dr_3}{dt}) = (\dot{r}_1, \dot{r}_2, \dot{r}_3). \tag{0.1}$$

Es läßt sich leicht überprüfen, daß $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ wieder ein Vektor ist. Somit gilt die Definition sinngemäß für höhere Ableitungen von $\mathbf{r}(t)$.

0.1.3 Die Tangente an eine Bahn

Der geometrische Ort aller Punkte P eines Ortsvektors $\vec{OP} = \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))$ sei gegeben durch die kontinuierliche Bahn B.

Sei P' ein bestimmter Punkt auf B an dem $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ exitiert und nicht gleich null ist. $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ liegt dann entlang der Tangente an B durch P' und zwar in Richtung des Weges den P mit zunehmendem t beschreibt. Und

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\|} \tag{0.2}$$

ist der dazugehörige *Einheits-Tangentialvektor.*

0.1.4 Bogenlänge

Wir betrachten die die Gleichung $\vec{OP} = \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))$ einer Bahn B in einem kontinuierlichen Intervall $t_1 \leq t \leq t_2$ und definieren

$$\frac{ds}{dt} = \|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\| = \sqrt{(\dot{r}_1)^2 + (\dot{r}_2)^2 + (\dot{r}_3)^2}. \tag{0.3}$$

Die Länge des Bogens vom Punkt mit Parameter t_1 bis zum Punkt mit variablem Parameter t zwischen t_1 und t_2 ist dann definiert als

$$s(t) = \int_{t_1}^{t} \sqrt{(\dot{r}_1)^2 + (\dot{r}_2)^2 + (\dot{r}_3)^2} dt. \tag{0.4}$$

Mit $s(t_1) = 0$, wird die *Bogenlänge* $l = s(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{r}_1)^2 + (\dot{r}_2)^2 + (\dot{r}_3)^2} dt$.

An Punkten wo $\frac{ds}{dt}$ weder unendlich noch null ist, definiert man den Bogen ds entsprechend einem Inkrement dt der Zeit t als

$$ds = \sqrt{(\dot{r}_1)^2 + (\dot{r}_2)^2 + (\dot{r}_3)^2} dt = \sqrt{dr_1{}^2 + dr_2{}^2 + dr_3{}^2}. \tag{0.5}$$

Nach Definition 0.3 ist $\frac{ds}{dt} \geq 0$, die Substitution $t = t(s)$ ist deshalb ein wohldefinierter Wechsel des Parameter. Wir erhalten $\mathbf{r}$ in Abhängigkeit von s,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = (r_1(s), r_2(s), r_3(s)), \quad 0 \leq s \leq l. \tag{0.6}$$

Den Einheits-Tangentialvektor können wir dan schreiben

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = (\frac{dr_1}{ds}, \frac{dr_2}{ds}, \frac{dr_3}{ds}). \tag{0.7}$$

0.1.5 Krümmung und Torsion

Aus Gleichung 0.7 erhalten wir

$$\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt}\frac{dt}{ds} = \hat{\mathbf{N}}\kappa, \quad \kappa \geq 0. \tag{0.8}$$

$\hat{\mathbf{N}}$, sekrecht zu $\hat{\mathbf{T}}$, ist der *Einheits-Hauptnormalvektor* und κ ist die *Krümmung,* ein Maß für die Richtungsänderung der Tangente mit s. $\rho = \kappa^{-1}$ ist als Krümmungsradius definiert. Er ist unendlich wenn $\kappa = 0$ ist. Die Bahn ist dann eine Gerade und $\hat{\mathbf{T}}$ ist nach Richtung und Größe konstant. Der *Einheits-Binormalvektor* $\hat{\mathbf{B}}$ steht auf $\hat{\mathbf{T}}$ und $\hat{\mathbf{N}}$ senkrecht, d.h. er ist definiert als

$$\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{T}} \times \hat{\mathbf{N}}. \tag{0.9}$$

Die drei Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{N}}$ und $\hat{\mathbf{B}}$ bilden also eine orthonormale, rechtshändige Triade.

Wenn wir Gleichung 0.9 differenzieren, erhalten wir unter Benutzung von 0.8

$\frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds} = \kappa\hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{N}} + \hat{\mathbf{T}} \times \frac{d\hat{\mathbf{N}}}{ds} = \hat{\mathbf{T}} \times \frac{d\hat{\mathbf{N}}}{ds}.$

Nun ist $\frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds}$ normal zu $\hat{\mathbf{B}}$ und liegt so in der Ebene von $\hat{\mathbf{T}}$ und $\hat{\mathbf{N}}$, und $\hat{\mathbf{T}} \times \frac{d\hat{\mathbf{N}}}{ds}$ ist normal zu $\hat{\mathbf{T}}$, somit ergibt sich

$$\frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds} = -\tau\hat{\mathbf{N}}, \tag{0.10}$$

wobei der Proportionalitätsfaktor τ eine Funktion von s ist und die *Torsion* des Hodographen genannt wird. Sie ist ein Maß der Änderungsrate der Richtung von $\hat{\mathbf{B}}$ mit s.

0.1.6 Skalar- und Vektorfelder

Wir betrachten eine geeignete Teilmenge S des dreidimensionalen Raumes $\mathbf{R}^3$ und ordnen jedem Punkt von S einen skalaren Wert zu. (Zum Beispiel die Temperatur T in jedem Punkt eines Raumes). Wir haben dann $T = T(x_1, x_2, x_3)$ und sprechen von einer *skalaren Funktion der Position* oder von einem *Skalarfeld,* eine reelle Funktion von drei Veränderlichen.

Interessiert man sich für den Änderungsverlauf in einem Skalarfeld und differentiert nach den drei Variablen, dann erhält man den *Gradient* des Skalarfeldes, der definiert ist als

$$grad\ T = (\frac{\partial T}{\partial x_1}, \frac{\partial T}{\partial x_2}, \frac{\partial T}{\partial x_3}). \tag{0.11}$$

Man definiert auch

$$grad\ T = \nabla T = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})T. \tag{0.12}$$

Der Operator $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$, der Nablaoperator, verhält sich wie ein Vektor.

Der Gradient eines Skalarfeldes (siehe Gleichung 0.11) ist ein Beispiel für eine *Vektorfunktion der Position,* also ein *Vektorfeld.* Die Änderung des Skalars (z.B. der Temperatur) hat nicht nur einen skalaren Betrag, sondern auch eine Richtung.