Vierundzwanzigste Woche, 07. Dezember, Copyright © 2009 by Gerhard Oberressl

0.0.1 Abstand eines Punktes von einer Ebene

a) Wir betrachten eine Ebene gegeben durch $Ax_1+Bx_2+Cx_3+D=0$ und einen Punkt P_1, der nicht in der Ebene liegt. Gemäß Gleichung **??** ist

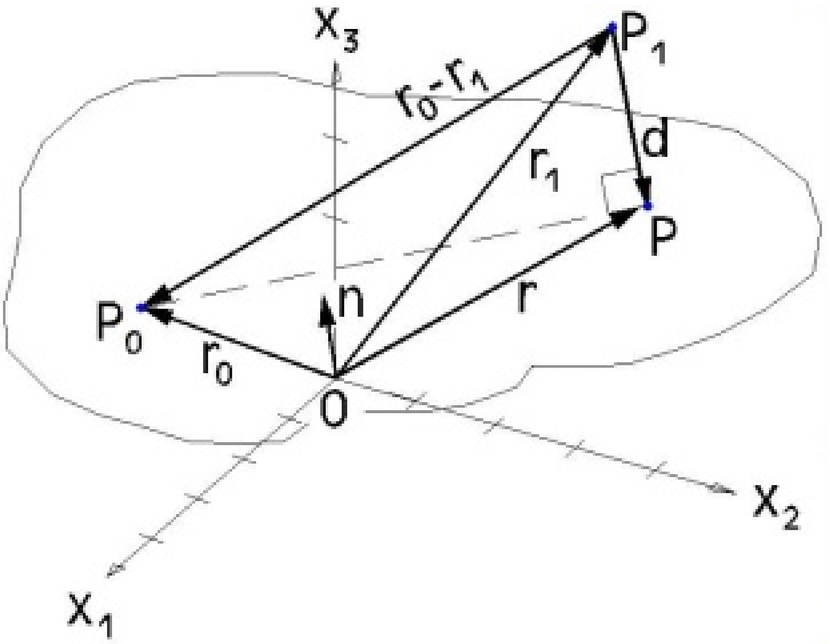
$\mathbf{n} = (A, B, C)$,
$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0 = -D$,
$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_1 = Ax_{11} + Bx_{21} + Cx_{31}$.
Ausserdem ist $\|\mathbf{n}\| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$
und der Betrag von $\mathbf{d}$, der Projektion von $\overline{P_1P_0} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1$ auf den Normalvektor $\mathbf{n}$ ist der gesuchte Abstand.

Also $d = \|\frac{\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_1)}{\|\mathbf{n}\|}\| = \|\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0-\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_1}{\|\mathbf{n}\|}\| = \|\frac{-D-Ax_{11}-Bx_{21}-Cx_{31}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\|$.

Mit anderen Worten, der Abstand d eines Punktes P_1 von der Ebene $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$ ergibt sich als

$$d = \|\frac{Ax_{11} + Bx_{21} + Cx_{31} + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\|. \tag{0.1}$$

Abbildung 0.1: Abstand eines Punktes P_1 von einer Ebene



b) Wir betrachten eine Ebene gegeben durch $\mathbf{nr} = \mathbf{nr}_0$ und einen Punkt P_1, der nicht in der Ebene liegt. P sei der Fußpunkt des Lotes von $\mathbf{P}_1$ auf $\mathbf{nr} = \mathbf{nr}_0$ (siehe Abb. 0.1), somit ist $\overline{P_1P} = \mathbf{d}$ auch ein Normalvektor der gegebenen Ebene. Der Winkel zwischen $\mathbf{d}$ und $\mathbf{n}$ ist deshalb 0^o oder 180^o, der Cosinus dieses Winkels also ± 1.

Andererseits ist $\mathbf{d}$ die Projektion von $\overline{P_1P_0} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1$ auf den Normalvektor $\mathbf{n}$.

Wir haben somit $\mathbf{n}(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1) = \mathbf{n}\mathbf{d}$. (Der Wert des Skalarproduktes bleibt gleich, wenn man den einen Vektor durch seinen Projektionsvektor auf den anderen Vektors ersetzt). Da $\mathbf{d} \parallel \mathbf{n}$, erhalten wir $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1) = \pm \|\mathbf{n}\| \|\mathbf{d}\|$.

Daraus ergibt sich

$$d = \| \frac{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)}{\|\mathbf{n}\|} \|. \tag{0.2}$$

Bemerkung: Allgemein kann man in einem skalaren Produkt den einen Vektor durch jeden anderen Vektor ersetzen, der dieselbe Komponente längs dem zweiten Vektor aufweist. Deshalb kann es auch keine Umkehroperation zum skalaren Produkt geben. Ist also ein Produkt (der Skalar) bekannt und einer der Vektoren, kann man den zweiten Vektor nicht eindeutig finden, sondern nur unendlich viele Kandidaten nennen.

Auch beim vektoriellen Produkt $\vec{v} \times \vec{w}$ ist keine Umkehrung möglich. Z. B. liefern alle die Vektoren $\vec{w_x}$ dasselbe Kreuzprodukt mit $\vec{v}$, die in der Ebene von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ liegen und deren Endpunkte auf einer Parallelen zu $\vec{v}$ durch den Endpunkt von $\vec{w}$ liegen. Alle liefern Parallelogramme der Höhe, die der Projektion von $\vec{w}$ auf die Normale auf $\vec{v}$ entspricht, also auch mit gleichem Flächeninhalt. Insbesondere bleibt der Wert des Vektorproduktes gleich, wenn man den einen Vektor durch seine Komponente längs der Normalen auf den anderen Vektor ersetzt.

Der Leser möge sich dei Sachverhalte anhand einer Skizze veranschaulichen.

0.0.2 Durchstoßpunkt einer Geraden durch eine Ebene

a) Wir betrachten eine Ebene gegeben durch $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$ bzw. durch $\mathbf{n}\mathbf{r}_E = \mathbf{n}\mathbf{r}_0$ und eine Gerade $\mathbf{r}_G = \mathbf{r}_0 + \lambda\mathbf{a}$. Der gemeinsame Punkt für Ebene und Gerade liefert $\mathbf{r}_E = \mathbf{r}_G$, d. h. $\mathbf{n}\mathbf{r}_0 = \mathbf{n}(\mathbf{r}_0 + \lambda\mathbf{a})$.

Da $\mathbf{n}$, $\mathbf{r}_0$ und $\mathbf{a}$ gegeben sind, kann man λ berechnen und in die Geradengleichung einsetzen, um den Ortsvektor des Durchstoßpunktes zu erhalten.

b) Wir betrachten eine Ebene gegeben durch $\mathbf{r}_E = \mathbf{r}_1 + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}$ und eine Gerade gegeben durch $\mathbf{r}_G = \mathbf{r}_0 + \lambda\mathbf{a}$. Der gemeinsame Punkt für Ebene und Gerade liefert $\mathbf{r}_E = \mathbf{r}_G$, also $\mathbf{r}_1 + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c} = \mathbf{r}_0 + \lambda\mathbf{a}$.

Da $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ gegeben sind, kann man λ, μ und ν berechnen. Es reicht schon, λ

zu bestimmen und in die Geradengleichung einzusetzen, um den Ortsvektor des Durchstoßpunktes zu erhalten.