Einundzwanzigste Woche, 16. November, Copyright © 2009 by Gerhard Oberressl

0.1 Die vierfachen Vektorprodukte

Produkte mit mehreren Vektoren sind nur sinnvoll, wenn als erster Schritt ein vektorielles Produkt gebildet wird. Dadurch ergeben sich für vier Vektoren die folgenden beiden sinnvollen Produkte, die oft in Verbindung mit den Gleichungen **??** oder **??** und der Tatsache, daß beim Spatprodukt Punkt und Kreuz vertauschbar sind, gelöst werden können.

0.1.1 Das skalare Produkt zweier Vektorprodukte

Durch Vertauschen von Kreuz und Punkt können wir zum Beispiel die folgende Umformung durchführen:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})]. \tag{0.1}$$

Unter Anwendung von Gleichung **??** erhalten wir für das dreifache Vektorprodukt

$$\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d}. \tag{0.2}$$

Einsetzen in Gleichung 0.1 ergibt

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}), \tag{0.3}$$

oder

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}. \tag{0.4}$$

0.1.2 Das vektorielle Produkt zweier Vektorprodukte

Unter Anwendung der Identität **??** erhalten wir

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})\}\mathbf{b} - \{\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})\}\mathbf{a} = [\mathbf{acd}]\mathbf{b} - [\mathbf{bcd}]\mathbf{a}. \tag{0.5}$$

Unter Anwendung der Identität **??** erhalten wir

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{d}\}\mathbf{c} - \{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}\}\mathbf{d} = [\mathbf{abd}]\mathbf{c} - [\mathbf{abc}]\mathbf{d}. \tag{0.6}$$

Aus den Gleichungen 0.5 und 0.6 folgt

$$[\mathbf{bcd}]\mathbf{a} - [\mathbf{acd}]\mathbf{b} + [\mathbf{abd}]\mathbf{c} - [\mathbf{abc}]\mathbf{d} = 0 \tag{0.7}$$

oder in Determinantenschreibweise

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{0.8}$$

Die Gleichungen 0.7 bzw. 0.8 stellen eine lineare Beziehung zwischen den vier Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ und $\mathbf{d}$ dar. Da vier Vektoren in $\mathbf{R^3}$ linear abhängig sein müssen, kann man einen Vektor als Linearkombination der drei anderen darstellen. Zum Beispiel $\mathbf{d} = \lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\nu\mathbf{c}$. Aus Gleichung 0.7 erhalten wir direkt

$$\mathbf{d} = \frac{[\mathbf{dbc}]\mathbf{a} + [\mathbf{adc}]\mathbf{b} + [\mathbf{abd}]\mathbf{c}}{[\mathbf{abc}]}. \tag{0.9}$$

Für den letzten Schritt (Gleichung 0.9) müssen wir uns erinnern, dass beim Spatprodukt $[\mathbf{abc}]$ die drei Vektoren zyklisch vertauscht werden können, sich hingegen bei Vertauschung zweier Vektoren das Vorzeichen ändert.