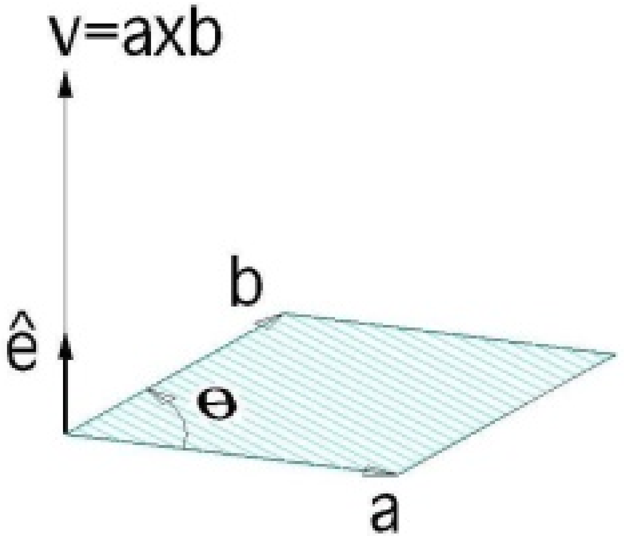
Neunzehnte Woche, 2. November, Copyright © 2009 by Gerhard Oberressl

0.1 Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

Abbildung 0.1: Vektorprodukt



Das *Vektor*- oder *Kreuzprodukt* zweier Vektoren **a** und **b** ist der Vektor

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} = (\mathbf{ab} \sin\theta)\hat{\mathbf{e}} \tag{0.1}$$

worin θ der Winkel $< 180^\circ$ zwischen **a** und **b** ist; $\hat{\mathbf{e}}$ ist ein Einsvektor senkrecht auf der von **a** und **b** aufgespannten Ebene derart, dass **a**, **b** und $\hat{\mathbf{e}}$ ein rechtsdrehendes System bilden. Der Betrag von **v** ist gleich der Fläche des von **a** und **b** aufgespannten Parallelogramms, in Abb 0.1 schraffiert dargestellt. Das Vektorprodukt ist nicht kommutativ. Eine andere Schreibweise für **v** ist

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{0.2}$$

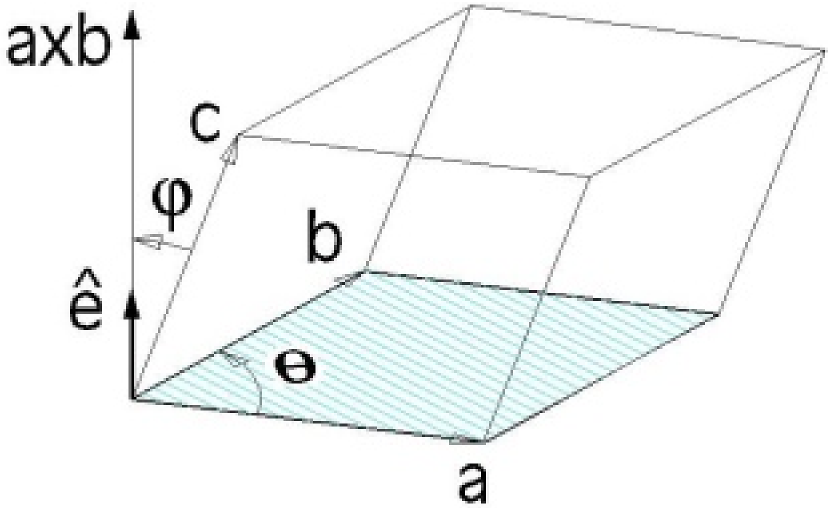
Was hier wie eine Determinante aussieht, ist zwar keine, weil in der ersten Zeile Vektoren stehen, wird aber nach dem gleichen Schema berechnet, wie eine Determinante. Also
$\mathbf{v} = (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{\mathbf{e}}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\hat{\mathbf{e}}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{\mathbf{e}}_3$
$= (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1) = (v_1, v_2, v_3)$.

0.2 Gemischtes Produkt (Spatprodukt)

Drei Vektoren **a**, **b** und **c** die nicht in einer Ebene liegen, spannen ein Prisma mit einem Parallelogramm als Grundfläche auf. Derartige Prismen nennt man Parallelepiped. Ihre

Form erinnert an das Mineral Eisenspat, daher auch Spatprodukt. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ist ein Vektor, der

Abbildung 0.2: Spatprodukt



auf $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ senkrecht steht und den Flächeninhalt des von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Paralelogramms angibt (siehe Vektorprodukt), sodass $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|\|\mathbf{c}\|\cos\varphi = \langle\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\mathbf{c}\rangle$ das Volumen des Parallelepipeds darstellt (siehe Abb. 0.2).

Dieses gemischte Produkt fällt negativ aus, wenn $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ ein Linkssystem bilden, also z.B. wenn zwei Vektoren vertauscht werden. Zyklische Vertauschung der Vektoren ändert das Produkt jedoch nicht. Es ist auch egal, mit welchen zwei benachbarte Vektoren zuerst das Vektorprodukt gebildet wird, da dann einfach eine andere Seite die Grundfläche des Parallelepipeds bildet. Man kann dieses Produkt deshalb einfach auch nur mit $[\mathbf{abc}]$ bezeichnen und wie folgt berechnen:

$$[\mathbf{abc}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{0.3}$$