0.1 Besprechung der Übungen

1. Die Richtungscosinus von Ox' relativ zu den Achsen $Oxyz$ sind $\cos\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{4}, \cos\pi$; die entsprechenden Werte für Oy' sind $\cos(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\cos\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{4}, \cos\pi$ und desgleichen für Oz': $\cos\frac{\pi}{4}, \cos\pi, \cos\frac{\pi}{4}$.

   Da die Basisvektoren u_1, u_2, u_3 im System $Ox'y'z'$ die Länge 1 haben, sind die entsprechenden Richtungscosinus gleichzeitig die Koordinaten von u_1, u_2 und u_3 bezüglich dem System $Oxyz$. Die Transformationsmatrix von $Ox'y'z'$ nach $Oxyz$ hat diese Werte als Spalten: $\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Um die Transformationsmatrix von $Oxyz$ nach $Ox'y'z'$ zu erhalten, wenden wir elementare Zeilenumformungen, wie folgt, an.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(1\ \&\ 2\ \&\ 3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(4)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{array}\right] \xrightarrow{(5)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(6)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{array}\right] \xrightarrow{(7)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(8)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{array}\right] \longrightarrow \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

   Die Umformungen im Einzelnen:

   (1) $Z_1 \to \sqrt{2} \cdot Z_1$,

   (2) $Z_2 \to \sqrt{2} \cdot Z_2$,

(3) $Z_3 \to \sqrt{2} \cdot Z_3$,

(4) $Z_2 \to Z_2 - Z_1$,

(5) $Z_2 \to \frac{1}{2} \cdot Z_2$,

(6) $Z_1 \to Z_1 + Z_2$,

(7) $Z_2 \to Z_2 + \frac{1}{2} \cdot Z_3$,

(8) $Z_1 \to Z_1 - \frac{1}{2} \cdot Z_3$.

Es ist daher $(\mathbf{v})_{(Ox'y'z')} = \mathbf{T} \cdot (\mathbf{v})_{(Oxyz)}$, also

$$(\mathbf{v})_{(Ox'y'z')} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{\sqrt{2}} \\ \frac{10}{\sqrt{2}} \\ \frac{20}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} \\ 10\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Umgekehrt ist

$(\mathbf{v})_{(Oxyz)} = \mathbf{T}^{-1} \cdot (\mathbf{v})_{(Ox'y'z')}$, also

$$(\mathbf{v})_{(Oxyz)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} \\ 10\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

2. Dieses Beispiel könnte zur Annahme verleiten, $(Ox^{'}y^{'}z^{'})$ sei ein kartesisches Koordinatensystem. Dem ist nicht so. Die Winkel zwischen zwischen $Ox^{'}$, $Oy^{'}$ und $Oz^{'}$ betragen jeweils nicht 90°, sondern nur 60°. Die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ ist daher auch keine orthogonale Matrix, die man nur zu transponieren bräuchte, um die Inverse zu erhalten. Wir gehen deshalb wie im letzten Beispiel vor, finden aber, zur Abwechslung, zuerst $\mathbf{T}$.

   Die Richtungscosinus von Ox relativ zu den Achsen $Ox^{'}y^{'}z^{'}$ sind $\cos\frac{\pi}{4}, \cos\pi, \cos\frac{\pi}{4}$; die entsprechenden Werte für Oy sind $\cos\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{4}, \cos\pi$ und desgleichen für Oz: $\cos\pi, \cos\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{4}$.

   Da die Basisvektoren $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ im System $Oxyz$ die Länge 1 haben, sind die entsprechenden Richtungscosinus gleichzeitig die Koordinaten von $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ und $\hat{e}_3$ bezüglich dem System $Ox^{'}y^{'}z^{'}$. Die Transformationsmatrix von $Oxyz$ nach $Ox^{'}y^{'}z^{'}$ hat diese

Werte als Spalten: $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Um die Transformationsmatrix von $Ox'y'z'$ nach $Oxyz$ zu erhalten, wenden wir elementare Zeilenumformungen, wie folgt, an.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{(1\ \&\ 2\ \&\ 3)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{array}\right]$$

$$\overset{(4)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{array}\right] \overset{(5)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{array}\right]$$

$$\overset{(6)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right] \overset{(7)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right]$$

$$\overset{(8)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right] \longrightarrow \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Die Umformungen im Einzelnen:

(1) $Z_1 \to \sqrt{2} \cdot Z_1$,

(2) $Z_2 \to \sqrt{2} \cdot Z_2$,

(3) $Z_3 \to \sqrt{2} \cdot Z_3$,

(4) $Z_3 \to Z_3 - Z_1$,

(5) $Z_3 \to Z_3 + Z_2$,

(6) $Z_3 \to \frac{1}{2} \cdot Z_3$,

(7) $Z_2 \to Z_2 - Z_3$,

(8) $Z_1 \to Z_1 - Z_2$.

Es ist daher $(\mathbf{v})_{(Ox'y'z')} = \mathbf{T} \cdot (\mathbf{v})_{(Oxyz)}$, also

$$(\mathbf{v})_{(Ox'y'z')} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\sqrt{2} \\ 10\sqrt{2} \\ 10\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Umgekehrt ist

$(\mathbf{v})_{(Oxyz)} = \mathbf{T}^{-1} \cdot (\mathbf{v})_{(Ox'y'z')}$, also

$$(\mathbf{v})_{(Oxyz)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10\sqrt{2} \\ 10\sqrt{2} \\ 10\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}.$$