Sechzehnte Woche, 12. Oktober, Copyright © 2009 by Gerhard Oberressl

Das folgende Transformationsschema stellt den Sachverhalt allgemein dar

O	x	y	z
x'	c_{11}	c_{12}	c_{13}
y'	c_{21}	c_{22}	c_{23}
z'	c_{31}	c_{32}	c_{33}

und liefert die Drehungsmatrix von $Oxyz$ nach $Ox'y'z'$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

und die Drehungsmatrix von nach $Ox'y'z'$ nach $Oxyz$

$$\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D}^t = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}, \tag{0.2}$$

somit

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}^t = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{0.3}$$

Da $\det(\mathbf{D}) = \det(\mathbf{D}^t)$, haben wir $\det(\mathbf{D}^2) = 1$, also immer $\det(\mathbf{D}) = -1$ oder $\det(\mathbf{D}) = +1$. Fallen die Achsen zusammen, wird aber $\mathbf{D} = \mathbf{E}_3$, also gilt $\det(\mathbf{D}) = 1$.

Werden bei einer Matrix zwei Zeilen vertauscht, ändert sich das Vorzeichen. Vertauscht man in einem rechtsdrehenden kartesischen Koordinatensystem zwei Zeilen, erhält man ein linksdrehendes. Deshalb gilt für ein linksdrehendes System $\det(\mathbf{D}) = -1$.

Da je zwei Achsen der beiden Systeme jeweils senkrecht aufeinander stehen und da wir in jedem System die jeweilige Standartbasis verwenden können, liefern die Skalarprodukte der Basisvektoren folgende Beziehungen, die ebenfalls die Drehungsmatrix auszeichnen:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{e}}_1', \hat{\mathbf{e}}_2' \rangle &= c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22} + c_{13}c_{23} = 0, \\ \langle \hat{\mathbf{e}}_2', \hat{\mathbf{e}}_3' \rangle &= c_{21}c_{31} + c_{22}c_{32} + c_{23}c_{33} = 0, \\ \langle \hat{\mathbf{e}}_3', \hat{\mathbf{e}}_1' \rangle &= c_{31}c_{11} + c_{32}c_{12} + c_{33}c_{13} = 0; \end{aligned} \tag{0.4}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2 \rangle &= c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} + c_{31}c_{32} = 0, \\ \langle \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3 \rangle &= c_{12}c_{13} + c_{22}c_{23} + c_{32}c_{33} = 0, \\ \langle \hat{\mathbf{e}}_3, \hat{\mathbf{e}}_1 \rangle &= c_{13}c_{11} + c_{23}c_{21} + c_{33}c_{31} = 0. \end{aligned} \tag{0.5}$$

und

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\mathbf{e}}_1^{'}, \hat{\mathbf{e}}_1^{'} \rangle &= c_{11}^2 + c_{12}^2 + c_{13}^2 = 1, \\
\langle \hat{\mathbf{e}}_2^{'}, \hat{\mathbf{e}}_2^{'} \rangle &= c_{21}^2 + c_{22}^2 + c_{23}^2 = 1, \\
\langle \hat{\mathbf{e}}_3^{'}, \hat{\mathbf{e}}_3^{'} \rangle &= c_{31}^2 + c_{32}^2 + c_{33}^2 = 1;
\end{aligned} \tag{0.6}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_1 \rangle &= c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2 = 1, \\
\langle \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_2 \rangle &= c_{12}^2 + c_{22}^2 + c_{32}^2 = 1, \\
\langle \hat{\mathbf{e}}_3, \hat{\mathbf{e}}_3 \rangle &= c_{13}^2 + c_{23}^2 + c_{33}^2 = 1.
\end{aligned} \tag{0.7}$$

Transformation der Koordinaten

Hat ein Punkt die Koordinaten (x, y, z) bezüglich $Oxyz$ und $(x^{'}, y^{'}, z^{'})$ bezüglich $Ox^{'}y^{'}z^{'}$, dann bestehen die Beziehungen

$$\begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \\ z^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z \\ c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z \\ c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z \end{pmatrix} \tag{0.8}$$

und

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \\ z^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}x^{'} + c_{21}y^{'} + c_{31}z^{'} \\ c_{12}x^{'} + c_{22}y^{'} + c_{32}z^{'} \\ c_{13}x^{'} + c_{23}y^{'} + c_{33}z^{'} \end{pmatrix}. \tag{0.9}$$