Zwölfte Woche, 15. Juni, Copyright © 2009 by Gerhard Oberressl

Ein bisschen Gauss'sche Elimination

Als dritte Lösungsmethode für unser Beispiel

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \text{oder} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

wollen wir das Gauss'sche[1] Eliminationsprinzip anwenden.

Wir bilden die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|B)$ und bringen diese durch elementare Zeilenumformungen in Staffelform.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & -1 \\ -2 & 3 & 6 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & -1 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 6 & 8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(2\&3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & -1 \\ 0 & -14 & -16 & 5 \\ 0 & 11 & 20 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{(4)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{16}{14} & -\frac{5}{14} \\ 0 & 11 & 20 & 6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(5)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{16}{14} & -\frac{5}{14} \\ 0 & 0 & \frac{104}{14} & \frac{139}{14} \end{array}\right] \xrightarrow{(6)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{16}{14} & -\frac{5}{14} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{139}{104} \end{array}\right]$$

Die Umformungen im Einzelnen:

(1) $Z_1 \longleftrightarrow Z_2$

(2) $Z_2 \rightarrow Z_2 - 3Z_1$,

(3) $Z_3 \rightarrow Z_3 + 2Z_1$,

(4) $Z_2 \rightarrow -\frac{1}{14}Z_2$,

(5) $Z_3 \rightarrow Z_3 - 11Z_2$,

(6) $Z_3 \rightarrow \frac{14}{104}Z_3$,

[1] Carl Friedrich Gauss, 1777 - 1855

Wir können jetzt ablesen $x_3 = \frac{139}{104}$.

Weiters haben wir $x_2 + \frac{16}{14}x_3 = -\frac{5}{14}$,

d.h. $x_2 = -\frac{16}{14}x_3 - \frac{5}{14} = -\frac{16}{14}\frac{139}{104} - \frac{5}{14}\frac{104}{104} = -\frac{2744}{14\cdot 104} = -\frac{196}{104}$,

und $x_1 + 4x_2 + 7x_3 = -1$

d.h. $x_1 = 4\frac{196}{104} - 7\frac{139}{104} - \frac{104}{104} = \frac{784-973-104}{104} = -\frac{293}{104}$.

Alternativ können wir noch die folgenden elementaren Zeilenumformungen vornehmen:

(7) $Z_2 \to Z_2 - \frac{16}{14}Z_3$,

(8) $Z_1 \to Z_1 - 7Z_3$,

(9) $Z_1 \to Z_1 - 4Z_2$.

d.h.

$$\stackrel{(7)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{196}{104} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{139}{104} \end{array}\right] \stackrel{(8)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & -\frac{1077}{104} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{49}{26} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{139}{104} \end{array}\right]$$

$$\stackrel{(9)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{293}{104} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{196}{104} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{139}{104} \end{array}\right].$$

Wir können jetzt direkt ablesen

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -\frac{293}{104} \\ -\frac{196}{104} \\ \frac{139}{104} \end{pmatrix}.$$

Probe: $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{293}{104} \\ -\frac{196}{104} \\ \frac{139}{104} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$, also $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

0.1 Quadratische Matrizen und lineare Gleichungssysteme

Für eine (z, z)-Matrix $\mathbf{A}$ sind die folgenden Eigenschaften gleichbedeutend:

1. Die Zeilen (und Spalten) von $\mathbf{A}$ sind linear unabhängig.
2. $\mathbf{A}$ hat Rang z.
3. $\mathbf{A}$ ist zeilenäquivalent zu $\mathbf{E}_3$.
4. Das System $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ hat mindestens eine Lösung für jedes $\mathbf{b}$.
5. Das homogene System $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ hat nur die triviale Lösung $(0, 0, ..., 0)$.
6. $\det \mathbf{A} \neq 0$.
7. $\mathbf{A}$ ist invertierbar.

0.2 Übungen

1. Hat das folgende System linearer Gleichungen Lösungen? Wenn ja, welche?

$$\mathbf{CX} = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}, \quad \text{oder} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

2. Hat das folgende System linearer Gleichungen Lösungen? Wenn ja, welche?

$$\mathbf{FX} = \mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}, \quad \text{oder} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$