Zehnte Woche, 1. Juni, Copyright © 2009 by Gerhard Oberressl

Wir wollen anhand dieses Beispiels im Folgenden noch die adjungierte und die inverse Matrix von $\mathbf{A}$ kennenlernen. Dazu brauchen wir ihre restlichen sechs Co-Faktoren, die wir hier gleich berechnen wollen: zunächst die Submatrizen

$$\mathbf{S_{21}} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{S_{22}} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{S_{23}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S_{31}} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{S_{32}} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{S_{33}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die Co-Faktoren ergeben sich somit als

$$\mathbf{C_{21}} = -\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{C_{22}} = +\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{C_{23}} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{C_{31}} = +\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{C_{32}} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{C_{33}} = +\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \text{ also}$$

$$\mathbf{C_{21}} = (-1)(-12-15) = 27, \quad \mathbf{C_{22}} = (1)(18+10) = 28, \quad \mathbf{C_{23}} = (-1)(9-4) = -5,$$

$$\mathbf{C_{31}} = (1)(-14-20) = -34, \quad \mathbf{C_{32}} = (-1)(21-5) = -16, \quad \mathbf{C_{33}} = (1)(12+2) = 14.$$

Zunächst können wir zur Probe den Wert der Determinante durch Entwicklung nach der zweiten Spalte ermittel:

$$\det(\mathbf{A}) = \det\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = a_{12}\mathbf{C_{12}} + a_{22}\mathbf{C_{22}} + a_{32}\mathbf{C_{32}}$$

$$= (-2)(-20) + 4 \cdot 28 + 3(-16) = 40 + 112 - 48 = 104.$$

In der Praxis wählt man natürlich die Zeile oder Spalte, die am wenigsten Rechenaufwand verspricht.

0.0.1 Die Matrix der Co-Faktoren, die Adjungierte und die Inverse

Ist $\mathbf{A}$ eine quadratische Matrix vom Typ (z, z) und ist C_{ij} der Co-Faktor der Komponente a_{ij}, dann nennt man die Matrix

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1z} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2z} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{z1} & C_{z2} & \cdots & C_{zz} \end{pmatrix}$$

die Matrix der Co-Faktoren von $\mathbf{A}$. Die Transponierte dieser Matrix heißt die adjungierte Matrix von $\mathbf{A}$, und wird mit $adj(\mathbf{A})$ bezeichnet.

Eine (z,z)-Matrix $\mathbf{A}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det \mathbf{A} \neq 0$ ist. $adj(\mathbf{A})$ liefert eine Methode, die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ von $\mathbf{A}$ zu finden, nämlich,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} adj(\mathbf{A}). \tag{0.1}$$

Beispiel: Für die $(3,3)$-Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ aus dem letzten Beispiel, haben wir die Co-Faktoren ermittelt wie folgt:

$\mathbf{C_{11}} = 3, \quad \mathbf{C_{12}} = -20, \quad \mathbf{C_{13}} = 11.$

$\mathbf{C_{21}} = 27, \quad \mathbf{C_{22}} = 28, \quad \mathbf{C_{23}} = -5,$

$\mathbf{C_{31}} = -34, \quad \mathbf{C_{32}} = -16, \quad \mathbf{C_{33}} = 14.$

Die Matrix der Co-Faktoren von $\mathbf{A}$ ist deshalb $\begin{pmatrix} 3 & -20 & 11 \\ 27 & 28 & -5 \\ -34 & -16 & 14 \end{pmatrix}$, und ihre Adjungierte, $adj(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 3 & 27 & -34 \\ -20 & 28 & -16 \\ 11 & -5 & 14 \end{pmatrix}$. Somit ist die Inverse von $\mathbf{A}$ gegeben durch $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{104}\begin{pmatrix} 3 & 27 & -34 \\ -20 & 28 & -16 \\ 11 & -5 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{104} & \frac{27}{104} & \frac{-34}{104} \\ \frac{-20}{104} & \frac{28}{104} & \frac{-16}{104} \\ \frac{11}{104} & \frac{-5}{104} & \frac{14}{104} \end{pmatrix}$.

Zum Vergleich soll hier die Inverse von $\mathbf{A}$ durch elementare Zeilenumformungen gefunden werden:

Wir erweitern die zu invertierende Matrix $\mathbf{A}$ auf der rechten Seite um die Einheitsmatrix $\mathbf{E}$ und nehmen and der erweiterten Matrix solange elementare Zeilenumformungen vor, bis links die Einheitsmatrix steht. Der rechte Block bildet dann die Inverse.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(2\&3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & -16 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 11 & 20 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(4)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{16}{14} & \frac{-1}{14} & \frac{3}{14} & 0 \\ 0 & 11 & 20 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{(5)}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{16}{14} & \frac{-1}{14} & \frac{3}{14} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{104}{14} & \frac{11}{14} & \frac{-5}{14} & 1 \end{array}\right] \overset{(6)}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{16}{14} & \frac{-1}{14} & \frac{3}{14} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{104} & \frac{-5}{104} & \frac{14}{104} \end{array}\right]$$

$$\overset{(7)}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{26} & \frac{7}{26} & \frac{-8}{52} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{104} & \frac{-5}{104} & \frac{14}{104} \end{array}\right] \overset{(8)}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & \frac{-77}{104} & \frac{139}{104} & \frac{-49}{52} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{26} & \frac{7}{26} & \frac{-8}{52} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{104} & \frac{-5}{104} & \frac{14}{104} \end{array}\right]$$

$$\overset{(9)}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{104} & \frac{27}{104} & \frac{-34}{104} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{26} & \frac{7}{26} & \frac{-8}{52} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{104} & \frac{-5}{104} & \frac{14}{104} \end{array}\right], \text{ wobei } \begin{bmatrix} \frac{3}{104} & \frac{27}{104} & \frac{-34}{104} \\ \frac{-5}{26} & \frac{7}{26} & \frac{-8}{52} \\ \frac{11}{104} & \frac{-5}{104} & \frac{14}{104} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{104} & \frac{27}{104} & \frac{-34}{104} \\ \frac{-20}{104} & \frac{28}{104} & \frac{-16}{104} \\ \frac{11}{104} & \frac{-5}{104} & \frac{14}{104} \end{bmatrix}.$$

Es bleibt dabei, $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{104} & \frac{27}{104} & \frac{-34}{104} \\ \frac{-20}{104} & \frac{28}{104} & \frac{-16}{104} \\ \frac{11}{104} & \frac{-5}{104} & \frac{14}{104} \end{pmatrix}$.

Probe: $\begin{pmatrix} \frac{3}{104} & \frac{27}{104} & \frac{-34}{104} \\ \frac{-20}{104} & \frac{28}{104} & \frac{-16}{104} \\ \frac{11}{104} & \frac{-5}{104} & \frac{14}{104} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, also $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}_3$.

Die Umformungen im Einzelnen:

(1) $Z_1 \to Z_2$ und $Z_2 \to Z_3$,

(2) $Z_2 \to Z_2 - 3Z_1$,

(3) $Z_3 \to Z_3 + 2Z_1$,

(4) $Z_2 \to -\frac{1}{14} Z_2$,

(5) $Z_3 \to Z_3 - 11Z_2$,

(6) $Z_3 \to \frac{14}{104} Z_3$,

(7) $Z_2 \to Z_2 - \frac{16}{14} Z_3$,

(8) $Z_1 \to Z_1 - 7Z_3$,

(9) $Z_1 \to Z_1 - 4Z_2$.