Neunte Woche, 25. Mai,

0.1 Determinanten

Auf der Menge der quadratischen Matrizen ist eine Funktion det definiert, die jeder (n,n)-Matrix eine reelle Zahl, ihre Determinante, zuweist.

Ist $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ eine Matrix vom Typ $(2,2)$ mit $a_{ij} \in \mathbf{R}$, dann ist ihre Determinante gegeben mit $\det(\mathbf{A}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \in \mathbf{R}$.

Bevor wir die Determinanten von (n,n)-Matrizen mit $n > 2$ berechnen können, wollen wir die wichtigsten Eigenschaften der Determinantenfunktion det von quadratischen Matrizen zusammenstellen:

1. Für eine (z,z)-Matrix $\mathbf{A}$ gilt, $\det(\mathbf{A}^t) = \det(\mathbf{A})$.
   Beispiel: Transponiert man die Matrix $\mathbf{A}$ oben, und nennt die neue Matrix $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, dann erhält man $\det(\mathbf{B}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \det(\mathbf{A})$.

2. Werden bei einer (z,z)-Matrix zwei Zeilen vertauscht, ändert sich das Vorzeichen ihrer Determinante.

   Beispiel: Vertauscht man bei der Matrix $\mathbf{A}$ oben die zwei Zeilen, und nennt die neue Matrix $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$, dann erhält man $\det(\mathbf{B}) = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -\det(\mathbf{A})$.

3. Wird bei einer (z,z)-Matrix eine Zeile mit einer Zahl $\lambda \in \mathbf{R}$ multipliziert, ändert sich der Wert der Determinante um den Faktor λ.

   Beispiel: Multipliziert man bei der Matrix $\mathbf{A}$ oben die zweite Zeile mit λ, und nennt die neue Matrix $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$, dann erhält man $\det(\mathbf{B}) = a_{11}\lambda a_{22} - a_{12}\lambda a_{21} = \lambda(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda \det(\mathbf{A})$.

4. Wird bei einer (z,z)-Matrix das λ-fache einer Zeile zu einer anderen Zeilen addiert, ändert sich der Wert der Determinante nicht.

   Beispiel: Addiert man bei der Matrix $\mathbf{A}$ oben das λ-fache der zweiten Zeile zur ersten Zeile, und nennt die neue Matrix $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + \lambda a_{21} & a_{12} + \lambda a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, dann erhält man $\det(\mathbf{B}) = (a_{11}+\lambda a_{21})a_{22} - (a_{12}+\lambda a_{22})a_{21} = a_{11}a_{22} + \lambda a_{21}a_{22} - a_{12}a_{21} - \lambda a_{22}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det(\mathbf{A})$.

5. Ist bei einer (z, z)-Matrix eine Zeile ein multiplikatives Vielfaches einer anderen Zeile, ist die Determinante der Matrix null.

   Beispiel: Setzt man in der Matrix $\mathbf{A}$ oben die zweite Zeile gleich λ-mal die erste Zeile, und nennt die neue Matrix $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \end{pmatrix}$, dann erhält man $\det(\mathbf{B}) = a_{11}\lambda a_{12} - a_{12}\lambda a_{11} = 0$.

6. Eine (z, z)-Matrix ist genau dann null, wenn ihre Zeilen linear abhängig sind, bzw. eine Zeile nur Nullen enthält. Ist das nicht der Fall, kann man die Matrix durch elementare Umformungen
   I. Vertauschen zweier Zeilen (Vorzeichen der Determinante wechselt)
   II. Multiplizieren einer Zeile mit $\lambda \neq 0$ (Determinante wird mit λ multipliziert)
   III. Addition von λ-mal einer Zeile zu einer anderen Zeile (Determinante wird nicht geändert)
   in eine obere oder untere Dreiecksmatrix umformen. Es gilt dann
   $\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} \cdots a_{zz} \cdot \frac{1}{\mu}$,
   dabei ist μ das Produkt der Faktoren λ, die durch die elementaren Umformungen die Determinante der Matrix vervielfacht haben. Das soll gleich an einem Beispiel demonstriert werden.

7. Wegen 1 gelten die Aussagen über Zeilen auch für Spalten.

Beispiel: Wir berechnen $\det(\mathbf{A})$ für die $(3, 3)$-Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$,

indem wir nach der Methode nach Punkt 6 vorgehen.

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} \text{ (vertauschen von Zeile 1 und 2)}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 11 & 20 \end{vmatrix} \text{ (addieren von 2mal die erste Zeile zur dritten Zeile)}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -14 & -16 \\ 0 & 11 & 20 \end{vmatrix} \text{(addieren von -3mal die erste Zeile zur zweiten Zeile)}$$

$$= (-1)(\tfrac{1}{11}) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -154 & -176 \\ 0 & 11 & 20 \end{vmatrix} \text{(multiplizieren der zweiten Zeile mit 11)}$$

$$= (-1)(\tfrac{1}{11})(\tfrac{1}{14}) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -154 & -176 \\ 0 & 154 & 280 \end{vmatrix} \text{(multiplizieren der dritten Zeile mit 14)}$$

$$= (-1)(\tfrac{1}{11})(\tfrac{1}{14}) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -154 & -176 \\ 0 & 0 & 104 \end{vmatrix} \text{(addieren der zweiten Zeile zur dritten Zeile)}$$

$$= (-1)(\tfrac{1}{11})(\tfrac{1}{14}) \cdot 1 \cdot (-154) \cdot 104 = 104.$$

0.1.1 Submatrizen einer (z,z)-Matrix; Co-Faktor C_{ij} der Komponente a_{ij}

Wer mit Zeilen- und Spaltenumformungen nicht so vertraut ist, wird die Zerlegung einer (z,z)-Matrix in lauter $(2,2)$-Matrizen bevorzugen.

Ist $\mathbf{A}$ eine quadratische Matrix, erhält man die zu a_{ij} gehörende Submatrix $\mathbf{S}_{ij}$, indem man aus der Matrix $\mathbf{A}$ die i-te Zeile und die j-te Spalte entfernt.

Der zu a_{ij} gehörenden Co-Faktor $\mathbf{C}_{ij}$ ist dann gegeben durch $\mathbf{C}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{S}_{ij})$.

Beispiel: Für die $(3,3)$-Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ aus dem letzten Beispiel, sind die Submatrizen der Komponeneten der ersten Zeile gegeben durch:

$$\mathbf{S_{11}} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{S_{12}} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{S_{13}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die Co-Faktoren ergeben sich somit als

$$\mathbf{C_{11}} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{C_{12}} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{C_{13}} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix},$$

also

$$\mathbf{C_{11}} = (1)(24-21) = 3, \quad \mathbf{C_{12}} = (-1)(6+14) = -20, \quad \mathbf{C_{13}} = (1)(3+8) = 11.$$

Da der Faktor $(-1)^{i+j}$ in $\mathbf{C}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{S}_{ij})$ nur das Vorzeichen liefert, kann man dieses auch mithilfe des folgenden Schemas leicht finden, indem man das Vorzeichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte wählt.

$$\begin{array}{cccccc}
+ & - & + & - & + & - \\
- & + & - & + & - & + \\
+ & - & + & - & + & - \\
- & + & - & + & - & + \\
+ & - & + & - & + & - \\
- & + & - & + & - & +
\end{array}$$

Die Determinante einer (z,z)-Matrix kann nun berechnet werden, indem man die z Komponenten einer beliebigen Zeile (oder Spalte) mit ihren Co-Faktoren multipliziert und die erhaltenen Produkte addiert.

Für unser Beispiel ergibt die Entwicklung nach der ersten Zeile

$$\det(\mathbf{A}) = \det\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = a_{11}\mathbf{C_{11}} + a_{12}\mathbf{C_{12}} + a_{13}\mathbf{C_{13}}$$

$$= 3 \cdot 3 + (-2)(-20) + 5 \cdot 11 = 9 + 40 + 55 = 104.$$