Achte Woche, 18. Mai, Copyright © 2009 by Gerhard Oberressl

0.0.1 Multiplikation zweier Matrizen

Sei $\mathbf{A} = (a_{ij}),\ i = 1, \cdots, z;\ j = 1, \cdots, s$, eine Matrix vom Typ (z, s) und sei $\mathbf{B} = (a_{jk}),\ j = 1, \cdots, s;\ k = 1, \cdots, p$, eine Matrix vom Typ (s, p).

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{z1} & a_{z2} & \cdots & a_{zs} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sp} \end{pmatrix}.$$

Wir definieren das Produkt $\mathbf{AB}$ als die Matrix $\mathbf{C}$ vom Typ (z, p) als

$$\mathbf{C}_{(z,p)} = (\sum_{j=1}^{s} a_{ij} b_{jk}) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{s} a_{1j} b_{j1} & \sum_{j=1}^{s} a_{1j} b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^{s} a_{1j} b_{jp} \\ \sum_{j=1}^{s} a_{2j} b_{j1} & \sum_{j=1}^{s} a_{2j} b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^{s} a_{2j} b_{jp} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{s} a_{zj} b_{j1} & \sum_{j=1}^{s} a_{zj} b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^{s} a_{zj} b_{jp} \end{pmatrix}. \tag{0.1}$$

Man beachte, daß die ik-Komponente (i-te Zeile, k-te Spalte) von $\mathbf{C}$ gegeben ist durch

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij} b_{jk} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \cdots + a_{is} b_{sk}, \tag{0.2}$$

das ist das Skalarprodukt **??** des i-ten Zeilenvektors des linken Faktors $\mathbf{A}$ mit dem k-ten Spaltenvektor des rechten Faktors $\mathbf{B}$.

Man erhält die p Einträge der ersten Zeile des Produktes, indem man mit der ersten Zeile des linken Faktors nacheinander mit den p Spalten des rechten Faktors das Skalarprodukt bildet und anschreibt.

Man erhält die p Einträge der zweiten Zeile des Produktes, indem man mit der zweiten Zeile des linken Faktors nacheinander mit den p Spalten des rechten Faktors das Skalarprodukt bildet und anschreibt, usw.

Multiplikation von zwei Matrizen ist deshalb eine Verallgemeinerung des Skalarproduktes.

Sehen wir uns noch ein numerisches Beispiel an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 6 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 6 & 4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & -10 \\ 50 & -19 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen, typmäßig ergibt $(2,3) \cdot (3,2) \rightarrow$ Typ $(2,2)$.

Die Multiplikation von quadratischen Matrizen ist immer definiert, ist aber im allgemeinen nicht kommutativ, d.h. im allgemeinen $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Gilt aber $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, dann heißen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ miteinander vertauschbar.

Die Einheitsmatrix

Eine (z,z)-Matrix heißt *Einheitsmatrix* $\mathbf{E}$ oder $\mathbf{E}_z$, wenn jedes Hauptdiagonalelement den Wert 1 darstellt, während alle anderen Elemente den Wert 0 haben:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{\mu\nu}), \quad \text{wobei } \delta_{\mu\nu} = \{ \begin{smallmatrix} 0 \ \textit{wenn} \ \mu \neq \nu \\ 1 \ \textit{wenn} \ \mu = \nu \end{smallmatrix}$$

$\delta_{\mu\nu}$ wird Kronecker[1]-Delta oder Kroneckersymbol genannt.

Einige Produkte mit der Einheitsmatrix:

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (u_1, u_2, u_3), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} \end{pmatrix}.$$

[1]Leopold Kronecker, 1823 - 1891

0.0.2 Transponierte Matrizen

Ist $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{z1} & a_{z2} & \cdots & a_{zs} \end{pmatrix}$ eine Matrix vom Typ (z, s), erhält man durch Vertauschen der Zeilen und Spalten ihre transponierte Matrix $\mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{z1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{z2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1s} & a_{2s} & \cdots & a_{zs} \end{pmatrix}$ vom Typ (s, z). (Man nimmt also Zeile für Zeile und schreibt sie als Spalte - oder umgekehrt).

Spezielle Beispiele:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ist $\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3)$ ein Zeilenvektor, ist $\mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ein Spaltenvektor.

Eine Matrix heißt *symmetrisch*, wenn sie gleich ihrer Transponierten ist, also wenn $\mathbf{A} = \mathbf{A}^t$. Eine symmetrische Matrix ist notwendigerweise eine quadratische Matrix.

Zum Beispiele $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 4 \\ -7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ist symmetrisch.