Siebente Woche, 11. Mai, Copyright © 2009 by Gerhard Oberressl

0.1 Matrizen

0.1.1 Definition der Matrix

Abbildung 0.1: Tabellarische Anordnung

$-e^{i\pi}$	$1,49599 \cdot 10^8$	$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$
$2,71828$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$	$2,99793 \cdot 10^5$
$40.030,36$	$3,14159$	$\ln e$

Wenn man ein Schema von Zahlen, wie in Abb. 0.1, in dem kein Platz leer ist (der Eintrag 0 ist aber gültig), wie folgt in Klammern schreibt,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -e^{i\pi} & 149,6 \cdot 10^6 & \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \\ 2,71828 & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz & 299\ 793 \\ 40\ 030 & 3,14159 & \ln e \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & \cdot \\ b_{21} & b_{22} & \dots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & b_{zs} \end{pmatrix}$$

spricht man von einer Matrix.

Die Matrix **A** ist vom Typ $(z, s) = (3, 3)$, d. h. sie hat drei Zeilen (waagrecht) und drei Spalten (senkrecht). Eine Matrix mit gleich viel Zeilen wie Spalten nennt man quadratisch.

Wenn aus dem Zusammenhang nicht klar ist, welchen Typ von Matrix man meint, schreibt man z.B. $\mathbf{B}_{(z,s)}$ um darzulegen, daß man eine Matrix **B** mit z Zeilen und s Spalten meint, wobei z und s jede positive ganze Zahl ab 1 sein können.
Symbolisch schreibt man eine Matrix auch (a_{ij}). Zur genaueren Spezifizierung kann man anfügen $\quad i = 1, \cdots, z;\ j = 1, \cdots, s.$

0.1.2 Matrizen als „Vektoren“

Wir wollen hier kurz erwähnen, daß die Menge aller (z, s)-Matrizen, z, s positive ganze Zahlen, mit lauter reellen Einträgen $(a_{ij}) \in \mathbf{R}$ einen Vektorraum $\mathbf{R}^s_z$, über den reellen Zahlen bildet.

Addition von Matrizen

Die Summe zweier Matrizen $\mathbf{A} = (a_{ij})$ und $\mathbf{B} = (b_{ij})$, $\quad i = 1, \cdots, z,\ j = 1, \cdots, s$ ist definiert als $\mathbf{A} + \mathbf{B} =$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{z1} & a_{z2} & \cdots & a_{zs} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{z1} & b_{z2} & \cdots & b_{zs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1s}+b_{1s} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2s}+b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{z1}+b_{z1} & a_{z2}+b_{z2} & \cdots & a_{zs}+b_{zs} \end{pmatrix}.$$

Das neutrale Element im Vektorraum $\mathbf{R}_z^s$, $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$,

ist die (z, s)-Nullmatrix, bei der alle Einträge $a_{ij} = 0$ sind.

Das zu einer gegebenen (z, s)-Matrix $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{z1} & a_{z2} & \cdots & a_{zs} \end{pmatrix}$ inverse Element

ist die Matrix $(-a_{ij}) = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1s} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{z1} & -a_{z2} & \cdots & -a_{zs} \end{pmatrix}$,

bei der alle Einträge betragsmäßig gleich, aber mit geändertem Vorzeichen aufscheinen.

Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar

Sei $\mathbf{A} \in \mathbf{R}_z^s$ und $\lambda \in \mathbf{R}$, dann ist $\lambda\mathbf{A}$ die Matrix $\lambda(a_{ij}) \in \mathbf{R}_z^s$, oder $\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{z1} & a_{z2} & \cdots & a_{zs} \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1s} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{z1} & \lambda a_{z2} & \cdots & \lambda a_{zs} \end{pmatrix}.$$

0.1.3 Unser 3-dimensionaler Raum

Insbesondere die Mengen der $(1,3)$ und der $(3,1)$ Matrizen, unsere Zeilen- und Spaltenvektoren aus $\mathbf{R}_1^3$ bzw. $\mathbf{R}_3^1$ sind eigene Vektorräume. Siehe z.B. Peter Weiss [**?**]. Ebenso bilden alle Punkte des Raumes und alle Ortsvektoren (die Repräsentanten der Äquivalenzklassen aller gerichteten Strecken) eigene Vektorräume. Da aber jedem Ortsvektor genau ein Punkt, genau ein Zeilenvektor und genau ein Spaltenvektor entspricht, sind alle vier Vektorräume gleichwertig, algebraisch von gleicher Gestalt, man sagt sie sind *isomorph.*

Deshalb werden wir, wie schon früher erwähnt, keinen Unterschied machen und alle Schreibweisen und Bezeichnungen für unsere 3-Komponentenvektoren des Raumes verwenden, wie es uns gerade genehm ist. Also z.B. $\mathbf{v}$, (v_1, v_2, v_3), $[v_1, v_2, v_3]$, $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$, $\overline{AB}$, $\underline{AB}$, $\overline{v}$, $\underline{v}$, $\vec{v}$, $\cdots$.