Sechste Woche, 4. Mai,

0.1 Besprechung der Übungen

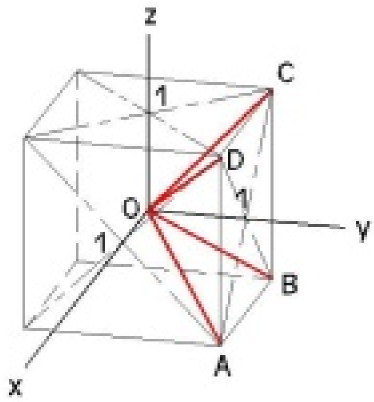
1. Die Komponenten von $\mathbf{A}$ sind die orthogonalen Projektionen von $\mathbf{A}$ auf die jeweilige Koordinatenachse Ox, Oy oder Oz, also gegeben durch $a_x = \|\mathbf{A}\| \cos\alpha$, $a_y = \|\mathbf{A}\| \cos\beta$ und $a_z = \|\mathbf{A}\| \cos\gamma$.

2. Den Cosinus des $\angle\ \gamma$ erhalten wir mit $\cos\gamma = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}$, also $\gamma = \cos^{-1}(\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta})$.

3. $\mathbf{w} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = (-2+1+0)\hat{\mathbf{i}} + (-1+2(\sqrt{2}+1)\hat{\mathbf{j}} + (5-3+2)\hat{\mathbf{k}} = (-1, 2\sqrt{2}, 4)$. $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{1+4\cdot 2+16} = 5$, somit sind die Richtungscosinus von $\mathbf{w}$ gegeben durch $c_w = (-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\sqrt{2}, \frac{4}{5})$. Die Richtungscosinus der Koordinatenachsen sind gegeben mit $c_1 = (1,0,0)$, $c_2 = (0,1,0)$ und $c_3 = (0,0,1)$. Somit ist $\alpha = arc\ cos(-\frac{1}{5}) \approx 101,54°$, $\beta = arc\ cos(\frac{2\sqrt{2}}{5}) \approx 55,55°$ und $\gamma = arc\ cos(\frac{4}{5}) \approx 36,87°$.

4. Wir haben $\|\vec{u}\| = \sqrt{\frac{22^2}{30^2} + \frac{(-20)^2}{30^2} + \frac{4^2}{30^2}} = \sqrt{\frac{900}{900}}$, d. h. $\vec{u}$ ist schon ein Einsvektor.

Abbildung 0.1: Die halben Raumdiagonalen eines Würfels



5. Abb. 0.1 zeigt einen Würfel mit mit seinem Zentrum im Koordinatenursprung, die Kanten parallel ausgerichtet zu den Koordinatenachsen. Der Würfel hat eine Seitenlänge von 2 Einheiten. Die Koordinaten der Punkte A, B, C, D sind daher gegeben mit $A(1,1,-1)$, $B(-1,1,-1)$, $C(-1,1,1)$, $D(1,1,1)$. Die Halbdiagonalen sind daher alle $\sqrt{3}$ lang und die Richtungscosinus ergeben sich deshalb zu $c_A = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}})$,
$c_B = (\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}})$, $c_C = (\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $c_D = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.
Der Cosinus von $\angle AOB$ ist somit $\frac{1}{3}$ und der Cosinus von $\angle AOC$ ist $\frac{-1}{3}$.

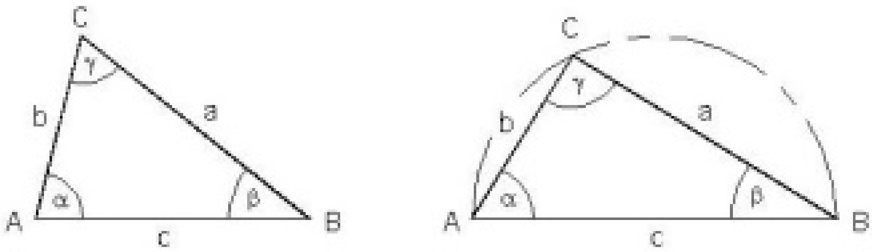
Da $cos(\pi - \theta) = -cos\theta$, schließen wir, daß sich die Winkel benachbarter und nicht benachbarter Diagonalen zu 180° ergänzen. Sie sind $\cong 70,53°$ und $\cong 109,47°$.

6. Wir finden zuerst $\cos\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $\cos\beta = \frac{1}{2}$. Somit ergibt sich $\cos\gamma = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha - \cos^2\beta} = \pm\sqrt{1-(-\frac{1}{2}\sqrt{2}) - \frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{2}$. Da γ ein stumpfer Winkel sein soll, erhalten wir $\cos\gamma = -\frac{1}{2}$ und $\gamma = \cos^{-1}(-\frac{1}{2})$, also $\gamma = 120°$.
   Daraus erhalten wir die Länge von $\overline{B}$: $\|\overline{B}\| = \frac{a_3}{\cos\gamma} = \frac{-2}{-0.5} = 4$.
   Schließlich ist $a_1 = 4(-\frac{1}{2}\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$ und $a_2 = 4(\frac{1}{2}) = 2$, also $\overline{B} = (-2\sqrt{2}, 2, -2)$.

0.2 Das rechtwinklige Dreieck

Das Dreieck in Abb. 0.2 rechts, hat einen rechten (90°) Winkel γ. Die Seiten a und b, die die Schenkel des rechten Winkels bilden, nennt man die Katheten, die Seite welchen dem rechten Winkel gegenüberliegt, heißt die Hypotenuse. Die Kathete, die einem spit-

Abbildung 0.2: Das schiefwinklige und das rechtwinklige Dreieck



zen Winkel gegenüberliegt, ist dessen Gegenkathete. Der Sinus[1] des rechten Winkels ist 1, der Cosinus des rechten Winkels ist 0. Für die spitzen Winkel gilt, $\sin\angle = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$ und $\cos\angle = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}$, also

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \sin\beta = \frac{b}{c}, \quad \cos\beta = \frac{a}{c}, \quad \sin\gamma = 1, \quad \cos\gamma = 0. \tag{0.1}$$

Im rechtwinkligen Dreieck gilt der *Satz des Pythagoras*:
Die Summer der Quadrate über den Katheten ist gleich dem Quadrat über der Hypotenuse, kurz

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{0.2}$$

0.3 Das schiefwinklige Dreieck

Anhand des Dreiecks in Abb. 0.2 links, das keinen rechten Winkel hat, wollen wir uns zwei weitere Sätze veranschaulichen.

[1]lat. der Busen

1. Der Sinussatz
$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma. \tag{0.3}$$

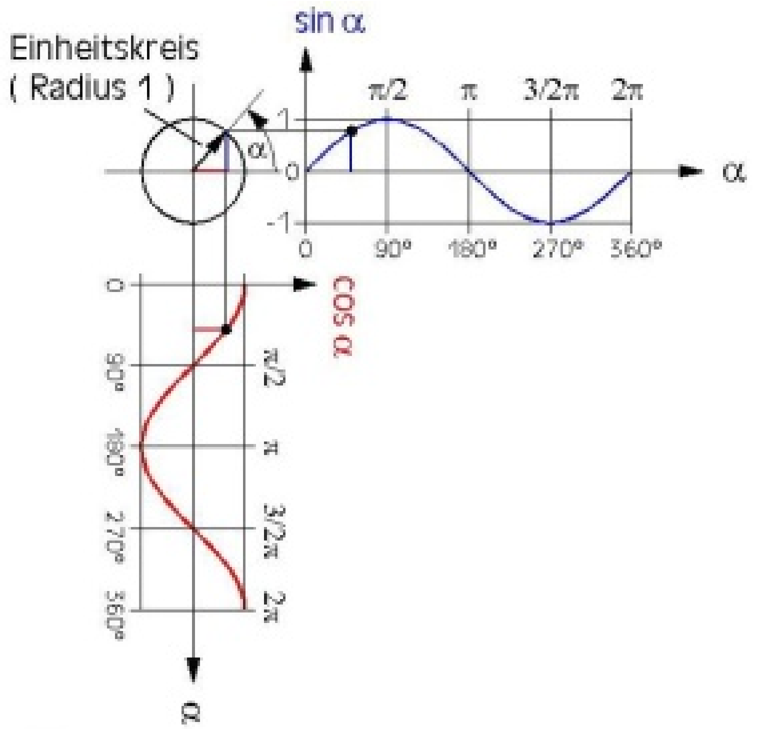
2. Der Cosinussatz: Für jede der Seiten gilt, wir nehmen hier c wegen dem direkten Vergleich zum Satz des Pythagoras,
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \tag{0.4}$$

Da im Satz des Pythagoras $\cos\gamma = 0$ ist, sieht man hier, daß (0.2) ein Spezialfall von (0.4) ist.

0.4 Der schönste Kreis der Welt

Der Kreis mit dem Durchmesser 1 hat einen ganz besonderen Charme, weil er den Umfang π hat. Bekannter ist aber der *Einheitskreis* mit Radius 1, also Durchmesser 2 und Umfang 2π. Wenn sich im Einheitskreis ein Radiusvektor im Gegenuhrzeigersinn

Abbildung 0.3: Der Einsheitskreis und die Winkelfunktionen



(der mathematisch positive Sinn) dreht, dann zeigen seine Projektionen auf die x- und y-Achse den Cosinus bzw. den Sinus an (siehe Abb. 0.3).

Da sich hier ein rechtwinkeliges Dreieck mit Hypotenuse der Länge 1 ergibt, kann man sich gut die Entstehung der Sinus- und Cosinuskurven vor Augen führen. Ausserdem sieht man sofort,

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1. \tag{0.5}$$

In Ausgangslage zeigt der Vektor nach rechts (Osten), α ist dann 0°. Anstatt mit Winkelgraden, arbeitet man oft mit dem Bogenmaß am Einheitskreis, das dem Winkel α entspricht. 2π entsprechen 360°. Die Einheit des Bogenmaßes ist 1 rad (*Radiant*). In

Abbildung 0.4: Sinus und Cosinus

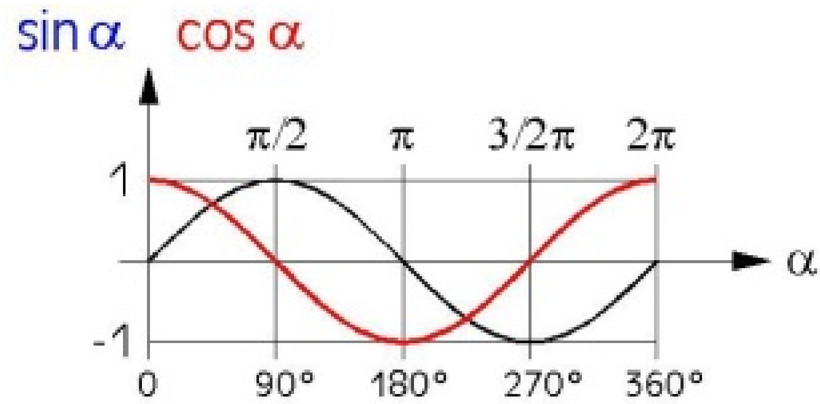


Abb. 0.4 sehen wir, den Verlauf von Sinus und Cosinus während einer Periode, von 0 bis 360°. Der Vollständigkeit halber seien hier noch die anderen Winkelfunktionen angeführt, die für gewisse Anwendungen handlicher sind.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x} \tag{0.6}$$

Sie heissen mit vollem Namen Tangens, Cotangens, Secans und Cosecans.

Schließlich noch ein Wort zu den Umkehrfunktionen. Hat man z. B. einen Cosinus, z. B. $\cos\alpha$, dan schreibt man den zugehörigen Winkel als $\alpha = \arccos\alpha$ oder $\alpha = \cos^{-1}\alpha$.

Letztere Schreibweise findet man meist auf Taschenrechnern. Mit diesen Tasten kann man also zu einem gegebenen Winkelfunktionswert, den Winkel finden, dem er zugehört.