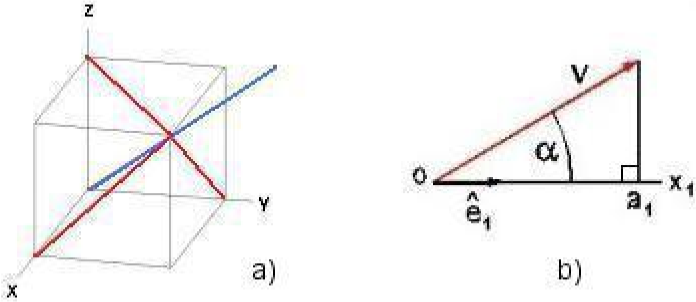
Vierte Woche, 20. April,

0.1 Besprechung der Übungen

1. $d = \sqrt{(11 - (-5))^2 + (-1 - (-7))^2 + (9 - (3))^2} = \sqrt{328} \approx 18.11$

Abbildung 0.1: Abstand eines Punktes zu einer Geraden, Richtungscosinus



2. Betrachten wir zuerst den ersten Oktanten. Der gesuchte Punk muß auf der Raumdiagonale (blau in Abb. 0.1) eines Würfels liegen. Der Abstand des Punktes zu einer Geraden ist die Länge der Senkrechten (Lot) vom Punkt zur Geraden. In Abb. 0.1 sind das die roten Flächendiagonalen. Die Koordinaten des Punktes sind gleich der Seitenlänge ($\frac{1}{2}$) des sich daraus ergebenden Würfels. Der gesuchte Punkt ist daher gegeben durch $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Probe: $\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{2(\frac{1}{4})} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Alle acht Punkte erhält man mit allen Kombinationen von $\pm$, $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$ geschrieben.
3. Die Koordinaten von $\mathbf{P}$ im System $Oxyz$ sind $(1, 1, -1) + (-1, 2, 0) = (0, 3, -1)$. Seine senkrechten Abstände zu den Ebenen: zur xy-Ebene $|-1| = 1$, zur yz-Ebene 0, zur zx-Ebene 3. Die Koordinaten vom O im System $Qmno$ sind $(-1, -1, 1)$. Mit $|a|,\ a \in \mathbf{R}$, meinen wir den *Betrag* von a, den positiven Wert von a, unabhängig vom Vorzeichen. In diesem Beispiel ist nur der Abstand von Interesse.
4. $U = 3\sqrt{2}$.
5. Siehe das folgende Kapitel.

0.2 Richtungscosinus

Zu bestimmen seien die Winkel α, β, γ welche ein Ortsvektor $\mathbf{v} = a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3$ mit den positiven Richtungen der Koordinatenachsen einschließt (siehe Abb. **??** c)).

Wir betrachten die durch die x_1-Achse und den Ortsvektor $\mathbf{v}$ definiert Ebene (siehe Abb. 0.1 b)). Die x_1-Koordinate von $\mathbf{v}$ ist a_1. Das ist die senkrechte Projektion von $\mathbf{v}$ auf x_1. Wir haben deshalb ein rechtwinkeliges Dreieck und erhalten

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\|\mathbf{v}\|}$$

Sinngemäß, (man betrachte die Ebenen gegeben durch x_2-Achse—**v** und x_3-Achse—**v**),

$$\cos\beta = \frac{a_2}{\|\mathbf{v}\|} \; und \; \cos\gamma = \frac{a_3}{\|\mathbf{v}\|}$$

Mit Gleichung **??** erhalten wir $\|\mathbf{v}\| = v = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$, somit

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{v}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{v}, \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{v}, \tag{0.1}$$

woraus wir die Winkel α, β, γ erhalten. Durch Quadrieren und Addieren erhalten wir zudem

$$\cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = \frac{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}{v^2} = 1 \tag{0.2}$$

Die Zahlen $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ heißen die *Richtungscosinus* von **v**. Wir wollen sie auch mit c_1, c_2, c_3 oder c^1, c^1, c^3 bezeichnen. Die Hochzahlen sind im letzteren Fall wiederum Positionsanzeiger und nicht mit Exponenten zu verwechseln. Ist unser Vektor **v** ein Einsvektor, sagen wir $\hat{\mathbf{e}}_v$, so erhält man wegen $\|\hat{\mathbf{e}}_v\| = 1$,

$$c_1 = \cos\alpha = a_1, \quad c_2 = \cos\beta = a_2, \quad c_3 = \cos\gamma = a_3$$

Da $\hat{\mathbf{e}}_v$ beliebig gewählt ist, gilt also:

Die Koordinaten eines Einsvektors sind seine Richtungscosinus. (0.3)

$$\hat{\mathbf{e}}_v = (c_1, c_2, c_3) = \hat{i}\cos\alpha + \hat{j}\cos\beta + \hat{k}\cos\gamma = \hat{e}_1\cos\alpha + \hat{e}_2\cos\beta + \hat{e}_3\cos\gamma = \sum_{i=1}^{3} c^i\hat{e}_i$$

sind einige Mögliche Schreibweisen.

Manchmal sind drei Zahlen a, b, c mit der Eigenschaft

$$a : b : c = c_1 : c_2 : c_3 \tag{0.4}$$

nützlich. Sind beispielsweise die c_i eines Einsvektors $\hat{\mathbf{e}}$ gegeben, erhält man mit den *Richtungs-Verhältniszahlen* λc_i als Koordinaten einen Vektor der Länge λ, mit der selben Wirkungslinie wie $\hat{\mathbf{e}}$. Oder anders gesagt, wenn (0.4) gilt, dann haben wir

$$c_1 = \frac{a}{\lambda}, \quad c_2 = \frac{b}{\lambda}, \quad c_1 = \frac{c}{\lambda}, \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

Nach (0.2) also

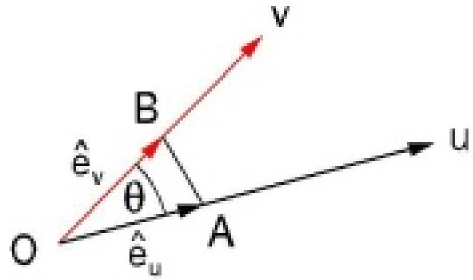
$$1 = \frac{a^2}{\lambda^2} + \frac{b^2}{\lambda^2} + \frac{c^2}{\lambda^2}, \tag{0.5}$$

und daraus

$$\lambda = \pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \tag{0.6}$$

Die Wahlmöglichkeit $\pm$ in (0.6) zeigt an, daß wir zu einem gegebenen Tripel von Richtungs-Verhältniszahlen zwei Sets von Richtungscosinus erhalten. Es handelt sich hier um zwei parallele, aber entgegengesetzte Richtungen.

Abbildung 0.2: Winkel zwischen Ortsvektoren



0.3 Winkel zwischen Ortsvektoren

Wir betrachten zwei Ortsvektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ mit Richtungscosinus c_i^1 bzw. $c_i^2,\ i = 1, 2, 3$. Um den Winkel θ zwischen $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ zu bestimmen, finden wir zuerst die Einsvektoren $\hat{\mathbf{e}}_u$ und $\hat{\mathbf{e}}_v$ und bezeichnen deren Endpunkte mit A und B (siehe Abb. 0.2). Die Koordinaten von A und B sind dann, wegen (0.3), $(c_1^1, c_2^1, c_3^1,)$ bzw. $(c_1^2, c_2^2, c_3^2,)$. Auf das Dreieck OAB wenden wir den *Cosinussatz* an:

$$(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos\theta = 2 - 2 \cdot \cos\theta.$$

Somit erhalten wir als Cosinus für den Winkel bei O,

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2} \cdot (AB)^2. \tag{0.7}$$